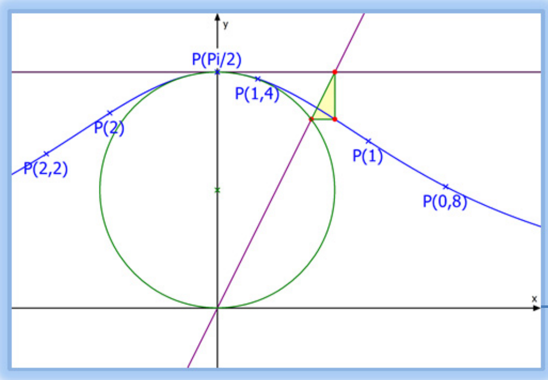



# Versiera der Agnesi

Text Nr. 54155

Stand 15.3.20



FRIEDRICH W. BUCKEL

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

# Vorwort

Die Versiera der Agnesi ist eine algebraische Kurve 3. Grades, die man auf einer geometrischen Eigenschaft definieren kann. Man kennt sie bereits seit 1703 (Pierre Fermat und Guido Grandi), ihren Namen hat sie von der italienischen Mathematikerin **Maria Agnesi**, die sie 1748 veröffentlichte.

Sie lässt sich auch durch eine einfache gebrochen rationale Funktion darstellen.
Der mathematische Aufwand hält sich in Grenzen, weshalb sich diese Kurve gut von Schülern der Oberstufe untersuchen lässt.

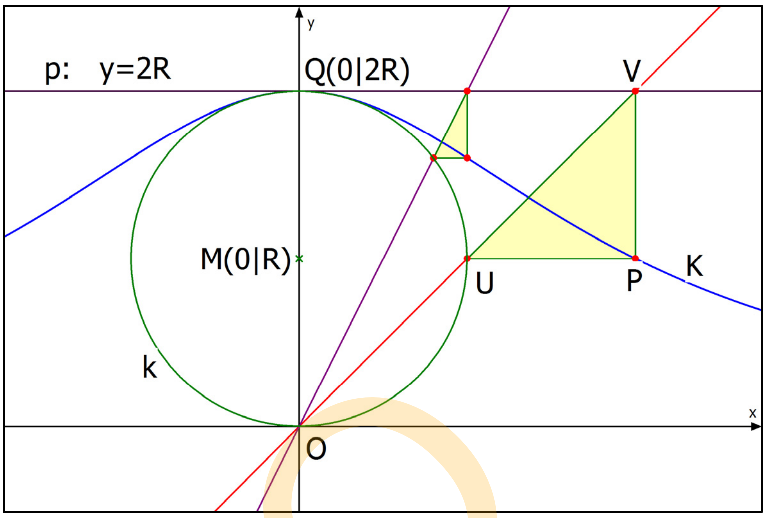
Eine ähnliche Kurve ist die Serpentine (Text 54160).

## Inhalt

# 1 Definition und Gleichungen

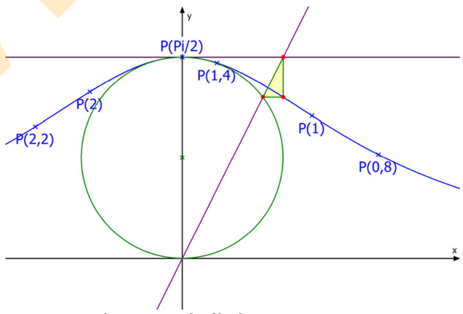
## 1.1 Konstruktion der Versiera als Ortskurve:

1. Zeichne den Kreis k um $M(0\,|\,R)$, hier mit R = 1.
2. In $Q(0\,|\,2R)$ zeichne die Parallele p zur x-Achse.
3. Eine beliebige Ursprungsgerade mit positiver Steigung schneidet k in U und p in V.
4. Die Parallelen zur x-Achse durch U und zur y-Achse durch V schneiden sich in einem Punkt P.




Die **Versiera** ist die Kurve, die aus allen diesen Punkt P und deren Spiegelbild bezüglich der y-Achse besteht, zusammen noch mit dem Punkt Q.

## 1.2 Diese Versiera hat folgende Gleichungen:




**Parametergleichungen:** Für $t \in [0\,;2\pi]$ gilt:

$$x(t) = 2R \cdot \cot(t) = 2R \cdot \frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{2R}{\tan(t)}$$

$$y(t) = 2R \cdot \sin^2(t)$$

Mit wachsendem t von 0 bis $2\pi$ durchläuft man die Kurve von rechts nach links, also von $\infty$ bis $-\infty$.

**Koordinatengleichung**

Implizit: $(x^2 + a^2) \cdot y - a^3 = 0$ Explizit: $y = \frac{a^3}{x^2 + a^2}$

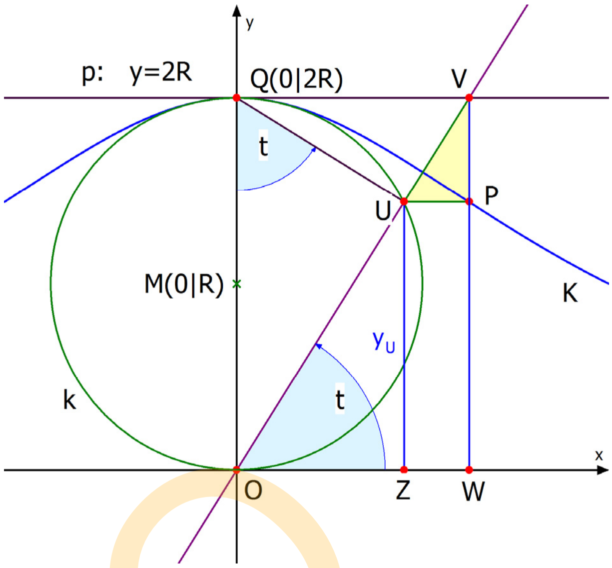
mit a = 2R, also a > 0.

**Waagrechte Asymptote** ist die x-Achse: y = 0,

$$\text{denn } \lim_{x \to \pm\infty} \frac{a^3}{x^2 + a^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{\frac{a^3}{x^2}}{1 + \frac{a^2}{x^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$$

# 2 Herleitungen der Gleichungen

## 2.1 Parametergleichungen




Der Polarkoordinatenwinkel t tritt im Dreieck OUQ noch einmal bei Q auf. Da U auf dem Kreis liegt hat nach dem Satz von Thales der Winkel $\sphericalangle$OQU $90^{\circ}$. Also folgt für die Strecke OU:

$$\sin(t)=\frac{\overline{OU}}{\overline{OQ}}=\frac{\overline{OU}}{2R}\;\Rightarrow\;\overline{OU}=2R\cdot\sin(t)\quad(1)$$

Damit kann man die Strecke ZU berechnen:

$$\sin(t)=\frac{\overline{UZ}}{\overline{OU}}\;\Rightarrow\;\overline{UZ}=\overline{OU}\cdot\sin(t)\quad(2)$$

(2) in (1): $\overline{UZ}=2R\cdot\sin^2(t)\quad(3)$

Dies ist zugleich die y-Koordinate des Kurvenpunktes P: $y(t)=2R\cdot\sin^2(t)$.

Die x-Koordinate von P ist die Länge der Strecke OW, die man im Dreieck OWV berechnen kann: VW

$$\tan(t)=\frac{\overline{VW}}{\overline{OW}}\;\Rightarrow\;\overline{OW}=\frac{\overline{VW}}{\tan(t)}=\frac{2R}{\tan(t)}\text{, also: }\quad x(t)=\frac{2R}{\tan(t)}.$$

$$\text{Da }\tan(t)=\frac{\sin(t)}{\cos(t)}\;\Rightarrow\;x(t)=\frac{2R}{\frac{\sin(t)}{\cos(t)}}=2R\cdot\frac{\cos(t)}{\sin(t)}=2R\cdot\cot(t)$$

Die Funktion Kotengens ist der Kehrwert des Tangens….

## 2.2 Koordinatengleichung aus der Parametergleichung

Zum Eliminieren von x und y eignet sich immer wieder die Gleichung $\sin^2(t)+\cos^2(t)=1$

Aus $y(t)=2R\cdot\sin^2(t)$ erhält man $\sin^2(t)=\frac{y}{2R}$.

Aus $x(t)=2R\cdot\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ erhält man $\cos(t)=\frac{x\cdot\sin(t)}{2R}$, also

$$\cos^2(t)=\frac{x^2}{4R^2}\cdot\sin^2(t)=\frac{x^2}{4R^2}\cdot\frac{y}{2R}=\frac{x^2\cdot y}{8\cdot R^3}$$

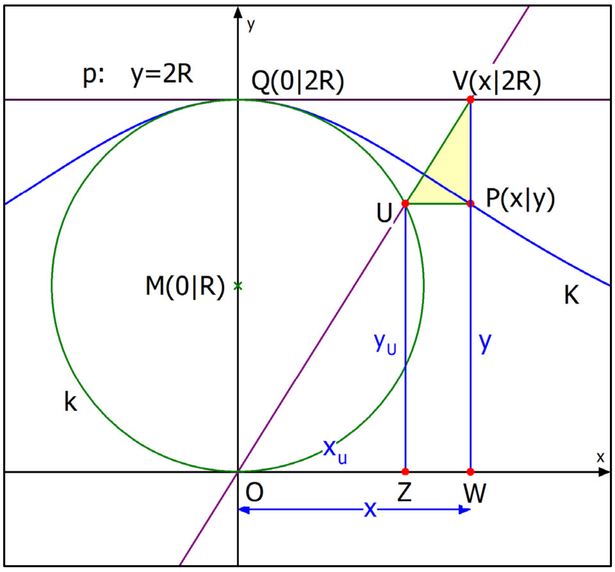
Also ist $\sin^2(t)+\cos^2(t)=\frac{y}{2R}+\frac{x^2y}{8R^3}=1 \quad | \cdot 8R^3$

$$y\cdot 4R^2+x^2y=8R^3$$

$$y\cdot\left(4R^2+x^2\right)=8R^3$$

Man setzt als Abkürzung 2R = a: $y\cdot\left(a^2+x^2\right)=a^3$

## 2.2 Koordinatengleichung aus der Definition




Wir betrachten die Strahlensatzfigur VOW.

Die Strahlen OV und OW werden von den parallelen ZU und VW geschnitten. Daher gilt:

$$\frac{\overline{VW}}{\overline{UZ}} = \frac{\overline{OW}}{\overline{OZ}} \qquad \text{(2. Strahlensatz)}$$

d. h. $\frac{2R}{y} = \frac{x}{x_U} \Rightarrow x_U = \frac{xy}{2R}$

Der Punkt $U(x_U \mid y)$ liegt auf dem Kreis k um $M(0 \mid R)$ mit dem Radius R und der Gleichung

$$x^2 + (y-R)^2 = R^2$$

Also erfüllt U die Kreisgleichung: $\left(\frac{xy}{2R}\right)^2 + (y-R)^2 = R^2$

$$\frac{x^2y^2}{4R^2} + y^2 - 2Ry + R^2 = R^2 \qquad | \ -R^2$$

$$\frac{x^2y^2}{4R^2} + y^2 - 2Ry = 0 \qquad | \ \cdot 4R^2$$

$$x^2y^2 + 4R^2y^2 - 8R^3y = 0$$

y ausklammern: $y\left[\left(x^2+4R^2\right)y - 8R^3\right] = 0$

Das ist ein Nullprodukt.

1. Faktor = 0:

$y = 0$

2. Faktor = 0:

$$\left(x^2+4R^2\right)y - 8R^3 = 0$$

$$\left(x^2+4R^2\right)y = 8R^3$$

$$y = \frac{8R^3}{x^2+4R^2}$$

Mit $a = 2R$: $y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$

Die Lösung des 1. Faktors (y = 0) ist eine unwichtige Nebenlösung. Wenn man U heruntergleiten lässt in den Ursprung, dann ist y = 0. Wenn man den obigen Strahlensatz umgekehrt aufstellt, wird er auch von y = 0 und $x_u$ = 0 erfüllt, ebenso die Kreisgleichung. Für unsere Kurve ist sie ohne Bedeutung.

# 3 Wendepunkte´

$$f(x) = y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$$

Zu ihrer Ableitung schreibt man $f(x) = a^3 \cdot (x^2+a^2)^{-1}$

1. Ableitung: $f'(x) = -a^3 \cdot (x^2+a^2)^{-2} \cdot 2x = -2a^3 \frac{x}{(x^2+a^2)^2}$

2. Ableitung: $f''(x) = -2a^3 \cdot \frac{1\cdot(x^2+a^2)^2 - 2(x^2+a^2)\cdot 2x \cdot x}{(x^2+a^2)^4}$

$$f''(x) = -2a^3 \cdot \frac{(x^2+a^2)\cdot\left[(x^2+a^2)-4x^2\right]}{(x^2+a^2)^4}$$

$$f''(x) = -2a^3 \cdot \frac{\left[x^2+a^2-4x^2\right]}{(x^2+a^2)^3} = -2a^3 \cdot \frac{a^2-3x^2}{(x^2+a^2)^3}$$

3. Ableitung: $f'''(x) = -2a^3 \cdot \frac{-6x\cdot(x^2+a^2)^3 - 3(x^2+a^2)^2 \cdot 2x \cdot (a^2-3x^2)}{(x^2+a^2)^6}$

Im Zähler $(x^2+a^2)^2$ ausklammern: $f'''(x) = -2a^3 \cdot \frac{\cancel{(x^2+a^2)^2}\left[-6x\cdot(x^2+a^2) - 6x\cdot(a^2-3x^2)\right]}{(x^2+a^2)^{\cancel{6}\,4}}$

$$f'''(x) = -2a^3 \cdot \frac{-6x^3-6a^2x-6a^2x+18x^3}{(x^2+a^2)^4} = -2a^3 \cdot \frac{12x^3-12a^2x}{(x^2+a^2)^4}$$

$$f'''(x) = -24a^3 \frac{x^3-a^2x}{(x^2+a^2)^4}$$

Notwendige Bedingung: $f''(x) = 0 \Leftrightarrow a^2-3x^2 = 0 \Leftrightarrow x^2 = \frac{a^2}{3} \Leftrightarrow x_W = \pm\frac{a}{\sqrt{3}} = \pm\frac{a}{3}\sqrt{3}$

Hinreichende Bedingung: $f'''(x_W) = -24a^3 \cdot \frac{\frac{a^2}{3}\cdot\frac{a}{\sqrt{3}} - a^2\cdot\frac{a}{\sqrt{3}}}{\left(\frac{a^2}{3}+a^2\right)} \neq 0$

y-Koordinate: $y_W = f\left(\pm\frac{a}{3}\sqrt{3}\right) = \frac{a^3}{\frac{a^2}{3}+a^2} = \frac{a^3}{\frac{4}{3}a^2} = \frac{3}{4}a$

Ergebnis: $W_{1,2}\left(\pm\frac{a}{3}\sqrt{3} \mid \frac{4}{3}a\right)$

# 4 Krümmungskreis im Scheitel

Im Text 54011 Differentialgeometrie wird auf Seite 13 die Krümmung besprochen.

Für die Koordinatenform lautet sie: $\kappa = \frac{y''}{\left(1+y'^2\right)^{3/2}}$

Die Ableitungen der Funktion $f(x) = y = \frac{a^3}{x^2+a^2}$ wurden auf Seite 6 berechnet:

1. Ableitung: $f'(x) = -2a^3 \frac{x}{\left(x^2+a^2\right)^2}$

2. Ableitung: $f''(x) = -2a^3 \cdot \frac{a^2-3x^2}{\left(x^2+a^2\right)^3}$

Für die Krümmung an der Stelle x = 0 gilt:

$$\kappa(x=0) = \frac{f''(0)}{\left(1+f'(0)^2\right)^{3/2}}$$

Nebenrechnung: $f'(0) = 0,\ f''(0) = -2a^3 \cdot \frac{a^2}{a^6} = -\frac{2}{a}$

Eingesetzt: $\kappa(x=0) = \frac{-\frac{2}{a}}{(1)^{3/2}} = -\frac{2}{a}$

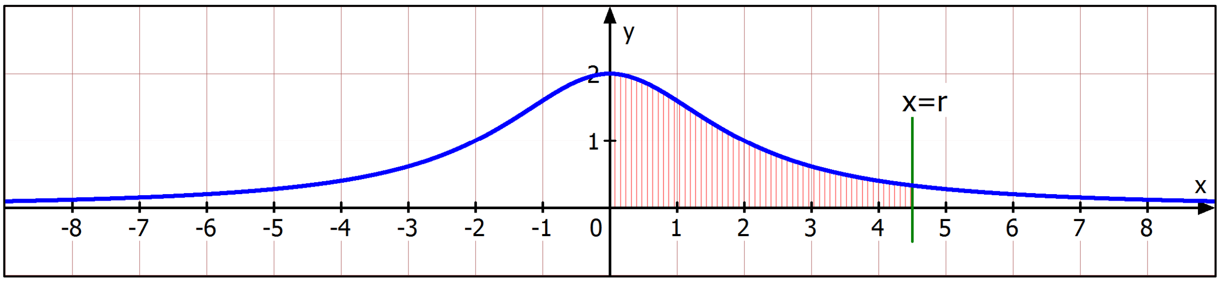
Nach Seite 17 gilt für den Radius des Krümmungskreises: $r = \frac{1}{|\kappa|}$.

Also ist der Krümmungskreisradius: $r(x=0) = \frac{a}{2}$ bzw. $r = \frac{2R}{2} = R$

Das heißt, dass der bereits eingezeichnete Kreis um $M(0\,|\,R)$ auch der Krümmungskreis in Q ist.

# 5 Fläche zwischen Kurve und Asymptote

## 1. Berechnung: Über die explizite Funktion




Da die Kurve symmetrisch zur y-Achse ist, berechnet man nur die rechte Seite:

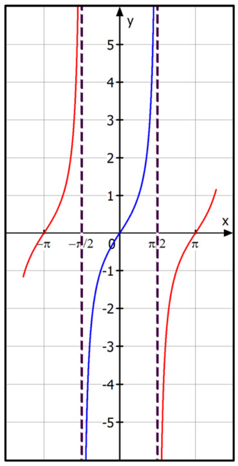
$$A(r)=\int_0^r \frac{a^3}{x^2+a^2}\,dx$$

Durch zwei Umformungen erreicht man als Stammfunktion die Arkustangensfunktion:

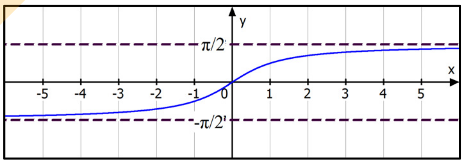
1. Kürzen durch $a^2$: $$A(r)=\int_0^r \frac{a}{\frac{x^2}{a^2}+1}\,dx$$

2. Substitution: $u=\frac{x}{a} \Rightarrow x=a\cdot u \Rightarrow \frac{dx}{du}=a \Rightarrow dx=a\cdot du$

$$A(r)=\int_0^r \frac{a}{u^2+1}a\cdot du=a^2\cdot\int_0^r \frac{1}{u^2+1}du$$



**WISSEN:** Die Funktion $g(x)=\tan(x)$ hat im Intervall $\left]-\frac{1}{2}\pi;\frac{1}{2}\pi\right[$ die Polstellen $x=\pm\frac{1}{2}\pi$, wobei für $x\to\frac{1}{1}\pi$ gilt $\tan(x)\to\infty$.
Die Tangenskurve hat also die senkrechten Asymptoten $x=\frac{1}{2}\pi$ und $x=-\frac{1}{2}\pi$.
Die Umkehrfunktion heißt Arkustangensfunktion: $y=\arctan(x)$. Sie hat die Ableitung $y'=\frac{1}{x^2+1}$ und die Grenzwerte $\lim\limits_{x\to\infty}\arctan(x)=\frac{1}{2}\pi$, $\lim\limits_{x\to-\infty}\arctan(x)=-\frac{1}{2}\pi$



Also ist $G(x)=\arctan(u)$ die Stammfunktion von $g(x)=\frac{1}{x^2+1}$

Es gilt also: $$\int\frac{1}{x^2+1}dx=\arctan(u)$$

Es folgt: $$A(r)=a^2\cdot\left[\arctan(u)\right]_0^r=a^2\cdot\left[\arctan(r)-\underbrace{\arctan(0)}_{0}\right]=a^2\cdot\arctan(r)$$

und $$\lim_{r\to\infty}A(r)=a^2\cdot\lim_{r\to\infty}\arctan(r)=a^2\cdot\frac{1}{2}\pi$$

Die ganze Fläche zwischen K und der x-Achse hat also den doppelten Inhalt: $A=\pi\cdot a^2$.

Oder für a= 2R: $A=4\pi\cdot R^2$

## 2. Berechnung: Über die Parameterdarstellung

$$x(t) = 2R\cdot\cot(t) = 2R\cdot\frac{\cos(t)}{\sin(t)} = \frac{2R}{\tan(t)} \qquad \text{und} \qquad y(t) = 2R\cdot\sin^2(t)$$

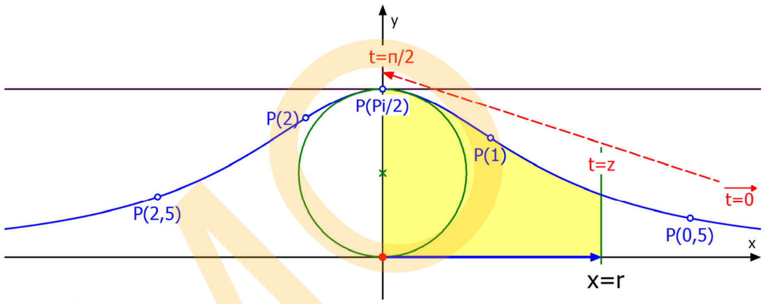
Die Fläche wird gemäß Text 54011 so berechnet: $A = \int_{t_1}^{t_2} y(t)\cdot\dot{x}(t)\,dt$

Daher benötigt man noch die Ableitung von $x(t) = 2R\cdot\frac{\cos(t)}{\sin(t)}$ mit der Quotientenregel:

$$\dot{x}(t) = 2R\cdot\frac{-\sin^2(t)-\cos^2(t)}{\sin^2(t)} = 2R\cdot\frac{-\left[\sin^2(t)+\cos^2(t)\right]}{\sin^2(t)} = 2R\cdot\frac{-1}{\sin^2(t)} = -\frac{2R}{\sin^2(t)}$$

Für die Grenzen der Fläche ist es wichtig zu wissen, dass man das x-Intervall $[0;\infty[$ mit dem t-Intervall $]0;\frac{1}{2}\pi]$ erhält, und zwar ist $x\left(\frac{1}{2}\pi\right) = 0$ und für $x \to 0+$ wird $x \to \infty$.

Dies zeigt auch die Abbildung:




$$A(r) = \int_0^r y\cdot dx = \int_{\pi/2}^{z} y\cdot\dot{x}\cdot dt = \int_{\pi/2}^{z} 2R\cdot\sin^2(t)\cdot\left(-\frac{2R}{\sin^2(t)}\right)dt = -4R^2\int_{\pi/2}^{z} dt = -4R^2\cdot[t]_{\pi/2}^{z} = -4R^2\cdot\left[z-\frac{1}{2}\pi\right]$$

Die Fläche reicht ins Unendliche für $r\to\infty$ bzw. $z \to 0+$, und außerdem nehmen wir die linke Hälfte noch dazu:

$$A = 2\cdot\lim_{x\to 0} A(z) = 2\cdot\left(-4R^2\left[-\frac{1}{2}\pi\right]\right) = 4\pi R^2$$

# 6 Rotationskörper

Lässt man die Fläche zwischen Kurve und x-Achse (Asymptote) um die y-Achse rotieren, entsteht ein Rotationskörper, dessen Inhalt nicht leicht berechenbar ist.

Wegen der Symmetrie der Kurve berechne ich zuerst nur den rechten Teil, denn Grenzen ich mit $x = 0$ bis $x = r$ ansetze, am Ende lässt man $r \to \infty$ gehen.

$$V_1(r) = \pi\int_0^r y^2 dx = \pi\int_0^r \left(\frac{a^3}{x^2+a^2}\right)^2 dx = a^6\pi \cdot \int_0^r \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx \qquad (1)$$

Zu diesem Integral kann findet man eine Stammfunktion, wenn man die **Reduktionsformel** aus Text 48052 verwendet. Sie lautet:

$$\boxed{\int \frac{1}{\left(ax^2+b\right)^n} dx = \frac{x}{2b(n-1)\left(ax^2+b\right)^{n-1}} + \frac{2n-3}{2b(n-1)} \int \frac{1}{\left(ax^2+b\right)^{n-1}} dx}$$

Für uns ist a = 1, b übernimmt $a^2$ und es ist n = 2. Die Formel liefert:

$$\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx = \frac{x}{2a^2 \cdot 1 \cdot \left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^2 \cdot 1} \int \frac{1}{x^2+a^2} dx$$

Also
$$\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx = \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{1}{x^2+a^2} dx \qquad (2)$$

Das Restintegral $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx$ lösen wir durch Kürzen $\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{x^2}{a^2}+1} dx$

und eine Substitution: $u = \frac{x}{a} \Rightarrow x = a \cdot u \Rightarrow dx = a \cdot du$, das ergibt:

$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \int \frac{\frac{1}{a^2}}{\frac{x^2}{a^2}+1} dx = \int \frac{\frac{1}{a^2}}{u^2+1} a \cdot du = \frac{1}{a}\int \frac{1}{u^2+1} du = \frac{1}{a} \cdot \arctan(u)$$

Rücksubstitution:
$$\int \frac{1}{x^2+a^2} dx = \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (3)$$

(2) in (1):
$$\int \frac{1}{\left(x^2+a^2\right)^2} dx = \frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^2} \cdot \frac{1}{a} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right) \qquad (4)$$

(4) in (1):
$$V_1(r) = \pi\int_0^r y^2 dx = \pi\int_0^r \left(\frac{a^3}{x^2+a^2}\right)^2 dx = a^6\pi \cdot \left[\frac{x}{2a^2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{1}{2a^3} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^r$$

Also:
$$V_1(r) = \pi \cdot \left[\frac{a^4 x}{2\left(x^2+a^2\right)} + \frac{a^3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{x}{a}\right)\right]_0^r$$

$$V_1(r) = \pi \cdot \left[\frac{a^4 r}{2\left(r^2+a^2\right)} + \frac{a^3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{r}{a}\right)\right] - \underbrace{\left[\frac{a^4 0}{2\left(0+a^2\right)} + \frac{a^3}{2} \cdot \arctan\left(\frac{0}{a}\right)\right]}_{=0}$$

Grenzwerte für $r \to \infty$: $\lim_{r\to\infty} \frac{r}{r^2+a^2} = \lim_{r\to\infty} \frac{\frac{1}{r}}{1+\frac{a^2}{r^2}} = \frac{0}{1+0} = 0$ und $\lim_{r\to\infty} \arctan(r) = \frac{1}{2}\pi$

Also ist $\lim_{r\to\infty} V_1(r) = \pi \cdot \frac{a^3}{2} \cdot \frac{1}{2}\pi = \frac{a^3}{4}\pi^2$, also Gesamtvolumen: $V = 2 \cdot \frac{a^3}{4}\pi^2 \Leftrightarrow V = \frac{1}{2}a^3\pi^2$